10.ランダム媒質中におけるクラックのサイズ分布(拡散に支配された凝集(DLA)およびその周辺の問題,研究会報告)

原, 啓明; 岡山, 誠司

(1986) 141.

(3) M. Matsushita, Y. Hayakawa, S. Sato and K. Honda: Phys. Rev. Lett, **59** (1987) 86.

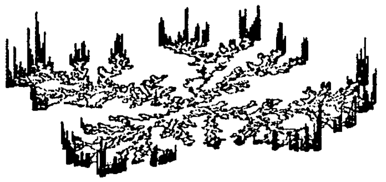


図 1 (a)

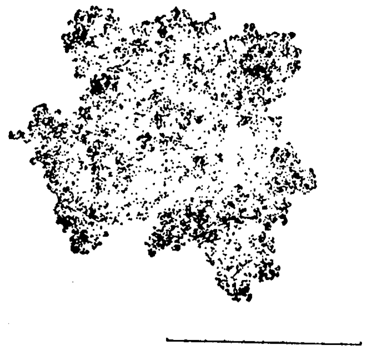


図 1 (b)

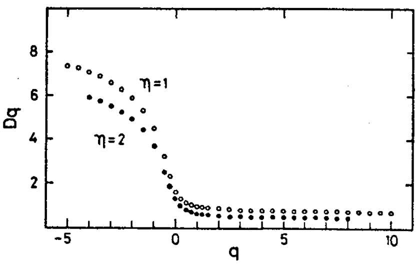


図 2 (a)

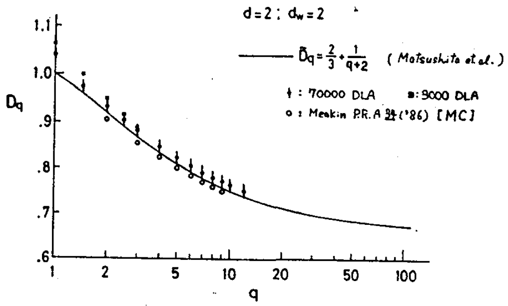


図 2 (b)

10. ランダム媒質中におけるクラックのサイズ分布

東北大・工　原　啓明

一橋大・経　岡山誠司

1. はじめに

前回は,[1] ランダム媒質中におけるクラックの成長モデルを，広い意味の情報科学[2] に対する方法として提案し，このモデルに基づき具体的にクラックのサイズ分布を導出した。この結果からクラックのサイズ分布はフラクタル次元で特徴づけられたべき分布から系のサイズ効果を表わす指数分布によって〝ずれる〞ことを示した。

本報告では，時間に依存するサイズ分布を導出し，この素過程を使って地震の規模別度数分

布の b 値の違いを議論する。また導出した分布を使って，異なる時刻におけるクラックの相関を調べる。

2. 基礎方程式とサイズ分布

応力 σ のもとで，時刻 t まで発生したクラックの数を N_t とすると，時刻 t で，長さ l のクラックの数 $n(l,\ t)$ は，クラックが時刻 t で，長さ l である確率密度関数 $W(l,\ t)$ と N_t の積として

$$n(l,\ t)=N_t\,W(l,\ t) \tag{2.1}$$

と表わされる。

N_t が十分大で，その時間変化が無視出来る時は，$n(l,\ t)$ の時間発展は，$W(l,\ t)$ で決まる。また $W(l,\ t)$ の時間発展は，長さ l_o をクラック成長・修復の単位として離散化された確率密度関数 $W(l/l_o, t/t_o)\equiv W(m, N)$ に対する，一般化されたランダムウォークの漸化式（GRW）によってモデル化出来る。[3)]

GRWの漸化式は，連続体近似（$l_o\to 0, t_o\to 0, l_o^2/t_o=$ 一定）をとると

$$\frac{\partial W(l,t)}{\partial t}=-\frac{l_o}{t_o}\frac{\partial}{\partial l}\left(P^+(l,\sigma)-P^-(l,\sigma)\right)W$$

$$+\frac{1}{2}\frac{l_o^2}{t_o}\frac{l^2}{\partial l^2}\left(P^+(l,\sigma)+P^-(l,\sigma)\right)W \tag{2.2}$$

の Fokker-Planck（FP）の方程式となる。$P^\alpha(l,\sigma)$（$\alpha=+,-,0$）は規格化条件 $\sum_\alpha P^\alpha(l,\sigma)=1$ を満す遷移確率である。地震の規模別度数分布の b 値の違いを調べるために，P^α の関数形を次式で定義する。

$$P^+(l,\sigma)=\frac{1}{2}[1-A(\sigma)+(C-\beta)\tilde{l}] \tag{2.3}$$

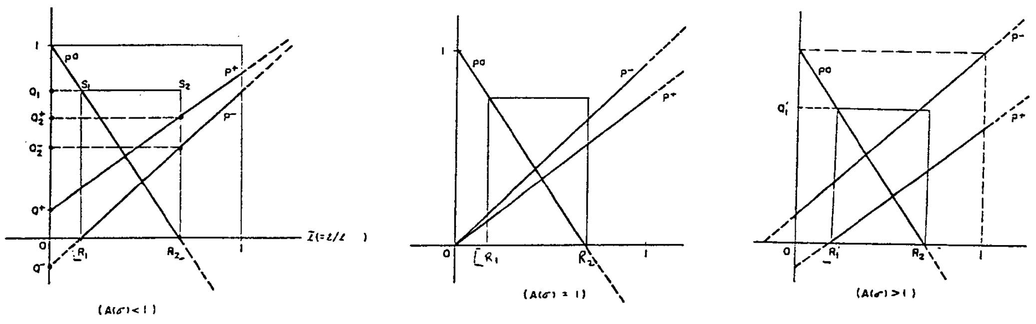
$$P^-(l,\sigma)=\frac{1}{2}[-(1-A(\sigma))+(C-\beta)\tilde{l}] \tag{2.4}$$

$$P^o(l,\sigma)(=1-(P^++P^-))=1-C\tilde{l} \tag{2.5}$$

$$(\tilde{l}=l/l_L)$$

P^+ は σ に応じてクラックを発生させる確率，P^- は σ に抗してクラックを修復する確率，P^o はク

ラックの状態を変えない確率を表わす。$A(\sigma)$はb値に相当する量で応力σに依存する。C，βは正の定数，l_Lは系の大きさを特徴づける長さである。図1(a)は，$A(\sigma)<1$，(b) $A(\sigma)=1$，(c) $A(\sigma)>1$に対するP^{α}の様子を示す。



(a)　　(b)　　(c)

図　1

図中の点は，$Q_1=1-C(1-A)/(C+\beta)$，$Q^{\pm}=\pm(1-A)/2$，$R_1=(1-A)/(C-\beta)$（$\sim l_o/l_L$）　$R_2=1/C$（$\sim l_C/l_L$, l_C：単位時間内で発生する最大のクラック長），$Q_2^{\pm}=[(1\pm\beta/C)\pm(1-A)]/2$　である。

（2．3）～（2．5）を（2．2）に代入した解のふるまいを調べる。簡単のため$l_L=1$，$l_o=t_o$，$l_oC=1/2$とする。初期条件$W(l,o)=\delta(l_o)$（$l_o\simeq 0$），境界条件$W(\infty,t)=0$のもとでは，（2．2）の定常解（$t\to\infty$）$W_o(l)$は

$$W_o(l)=\frac{1}{\beta^A\Gamma(1-A)}\,l^{-A}\,\mathrm{e}^{-\beta l},\ (A\neq 1) \qquad (2.6)$$

となる。$\Gamma(x)$はガンマ関数である。従ってサイズ分布$n(l)$ $(=N_\infty W_o(l))$は，前回の結果と同様，べき分布l^{-A}とβで決まる指数分布の積となる。P^{α}におけるβの役割は，$A(\sigma)\geq 1$では不等式$P^->P^+$（図1(b)，(c)参照）を通じて，大きい$\tilde{l}$（$=l/l_L$）のクラックに対する，抗力による一種の″サイズ効果″をとり入れている。$A(\sigma)<1$では$P^-<P^+$である。この意味で，我々のモデルにおいて，べき分布の指数$A(\sigma)$の値（～1）はクラックの発生・修復の素過程における一種の″クロスオーバー″を決める重要な指数である。

時間tを十分大として$N_{t+\Delta t}\simeq N_t$とみると，サイズ分布$n(l,t)$は（2．2）の解$W(l,t)$を使って

$$n(l,\ t)\,(=N_{\infty}W(l,\ t))=N_{\infty}W_{o}(l)\ \frac{e^{-\frac{le^{-t}}{1-e^{-t}}}}{(1-e^{-A})^{1-A}}$$

$$\equiv N_{\infty}W_{o}(l)\ g(l,\ t) \qquad (2.\ 7)$$

と表わされる。

図2は $g(\ l,\ t)$ のふるまいを示す。

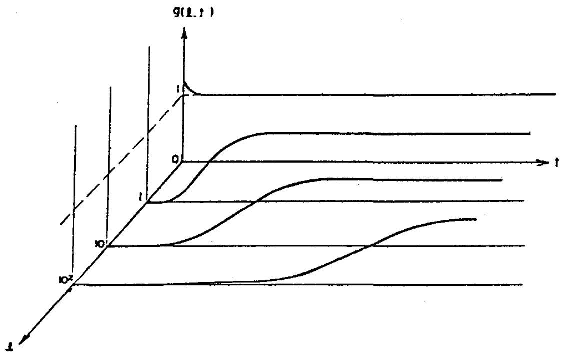


図2

図3は図(2.7)を $\log\ n(\ l,\ t)$, $\log\ l$ と t で目盛ったサイズ分布を示す。

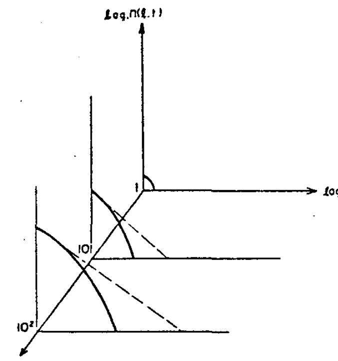


図3

3. クラックの相関スペクトル

初期条件を $\delta\,(l-l_o)$ として，（2．3）～（2．5）で特徴づけられた（2．2）の解 $W(l,\ l_o;\ t,0)$ を求めると

$$W(l,\ l_o\ ;\ t,\ 0)=\sum_{m=0}^{\infty} X_m(l)\ X_m\,(l_o)\ e^{-m\beta t} \qquad (3.\ 1)$$

$$[\ X_n(l) = W_o(l)\frac{e^{\beta l}}{n}\ e^A \frac{d}{d(\beta l)}(\ e^{-\beta l}(\beta l)^{n-A}\ )\ ]$$

となる。（2．7）の解$W(l,t)$は上式の$W(l,0:t,0)$に等しい。各時刻(t)におけるクラックの長さlを確率変数として$l(t)=l$と表わし，異なる時刻における長さl，l'のクラックの相関関数を次式で定義する。

$$C(t) = <(\ l(t+\tau) - <l(t+\tau)>)(l(t) - <l(t)>)> \qquad (3.\ 2)$$

ここで＜　＞はアンサンブル平均で次式

$$<l(t+\tau)\ l(\tau)> = \int\int l\,l'\,W(\ l, l' : t+\tau, t\ )\,dl\,dl' \qquad (3.\ 3)$$

によって平均を定義する[4)]。

$C(\tau)$のフーリェ変換，すなわちパワースペクトル強度$C(\omega)$は，$A\sim 1$，βが非常に小さい（0.1〜0.01）ことを使って近似的に評価すると

$$C(\omega) \simeq \frac{1}{2\pi\beta^3}\{\frac{1}{1+(\omega/\beta)^2} + [\frac{1}{(\omega/\beta)^2} + O(\beta^3)\ ]$$

$$\times \ln(1+(\omega/\beta)^2 + O(\beta^3)\ \} \qquad (3.\ 4)$$

となる。

これは，破壊現象でおこる地震波のスペクトルの２乗に関連する量と考えることが出来よう。

4. 議　論

今回は，観測可能な最小の長さl_oを単位にして，成長するクラックの確率過程モデルを考察し，t依存性を持つサイズ分布を具体的に求めた。分布は$t\to\infty$では前回[1)]求めた関数形と同じものになる。今回のサイズ分布を与えるモデルにおいて，$A<1$では$P^+ > P^-$であるのに対して，$A\geq 1$では$P^+ < P^-$となり応力σに抗する確率が優性であることを示す。この事は大きいクラックは段々出現しにくくなり，サイズ分布は″急勾配″になることを示す。この事情は，クラックの成長を微小なクラック（単位長さl_o）が，隣接点の数(z)がランダムに分布しているネットワーク上を凝集するプロセスと考えると，$A(\sigma)=1$の前後で，ネットワーク構造が変化することを意味する。ただしzは応力の作用する面の＋側，－側，面上（$\alpha=0$）で，P^αの逆数に比例する量として表わされるものとする。

以上モデル過程における$A(\sigma)=1$前後の定性的なプロセスの違いは，発破によって誘発される微小破壊（$b\sim1.18$）と群発活動した微小破壊（$b\sim2.29\sim2.53$）,[5] また大地震（$b\sim1$）毎に観測された小破壊群（$b\sim2.06\sim2.73$）[6] におけるb値のちがいを，ある程度説明出来るものと思われる。

文　献

1） 原　啓明，岡山誠司：物性研究，No.5，(1987)106.

2） 岡山誠司：一橋大学年報，自然科学25 6月号（1986）3

3） H. Hara：Phys. Rev. B 15（1979)4062

4） 地震スペクトル解析では，相関関数は時間平均で計算する。小山順二：地震，26（1983)(1983)255

5） 飯尾能久：地震 36（1983)13, 37（1984)109

6） 古本宗充：数理地震学(II)（斉藤正徳編集，統計数理研）(1987)58

11.　Sierpinski carpet上の物理現象のユニバーサリティー

東工大・理　　田　口　善　弘

マンデルブロの提唱したフラクタルの概念が「次元」という概念を拡張するであろうということは、高安秀樹氏の名著「フラクタル」にも述べられている通りである。本稿では、決定論的に作られる人工的なフラクタルのみに話を限り、この図形を格子と見なしてその格子上の物理現象を考える。そして、その物理現象のユニバーサリティー・クラスによって（必ずしもフラクタル次元のみにはよらずに）フラクタル図形を分類するという試みについて、筆者の知るところをレビューしよう。

現在では、物理現象のバルクとしてフラクタルを考えた場合、フラクタル格子のｒａｍｉｆｉｃａｔｉｏｎ　R[1]と呼ばれる量が非常に重要あることは間違いないと思われている。R は、「フラクタル格子から無限に大きいクラスターを切り取るのに必要な最小限の切断ボンド数」として定義される。Ｆｉｇ．1にR が有限であるフラクタル格子の例を示す。さて、ここで　ちょっと考えてみれば解るように、「無限に大きいクラスターを切り取るのに、有限個のボンドの切断しか必要としない格子」とは我々が良く知っている普通のｄ次元格子の中では、1次元の格子にのみ見られる特質である。（どんなに長い線分を切り取るのにも2ヶ所を切る必要しかない。）このため、R ：有限のフラクタル格子は、本質的に1次元的、つまり、「毛の生えた1次元系」の程度でしかないのではないかという予想が生じてくる。そしてこの予想は、「バルクとしてのフラクタル」を考えた場合にはかなり正しいらしいことが、解ってきた。